ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDO)

TEMA 15: ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN 1

INTRODUCCIÓN: EDO de orden 1 en Química

Una reacción química se puede representar por medio de una ecuación de la forma

$$aA + bB + \cdots = pP + qQ + \cdots$$

donde $A, B, \ldots$ (en la práctica, fórmulas químicas) representan las especies químicas que están reaccionando para dar los productos $P, Q, \ldots$. Los números $a, b, \ldots,$ y $p, q, \ldots,$ significan que a moléculas de A reaccionan con b moléculas de $B, \ldots,$ para producir p moléculas de P, q moléculas de $Q, \ldots$ Por ejemplo

$$\underbrace{2}_{a}\,\underbrace{H_2}_{A} + \underbrace{1}_{b}\cdot\underbrace{O_2}_{B} = \underbrace{2}_{p}\,\underbrace{H_2O}_{P}$$

Nos interesamos ahora en estudiar la velocidad ~~en~~ a la que una reacción química se produce. Experimentalmente se ha observado que dicha velocidad depende de las cantidades de todas las especies ~~presente~~ químicas presentes en el tiempo t, tanto los reactantes como los productos, de la temperatura, la presión, etc...

Consideremos el caso más sencillo en que dicha velocidad depende ~~de~~ sólo de la cantidad de reactantes.

Experimentalmente se observa que la velocidad v de la reacción química tiene la forma

$$v = k[A]^{\alpha}[B]^{\beta}\ldots$$

donde $[A], [B], \ldots$ representa la concentración de las especies, A, B, ..., es decir la cantidad de especie por unidad de volumen, ~~y~~ $\alpha, \beta, \ldots$ son números que definen el orden de la reacción, y k es también una constante. Algunos de los casos más habituales en Química son los siguientes:

1) Proceso de orden 1: $A \longrightarrow$ productos

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = k[A].$$

Si denotamos por $x = x(t) = [A](t)$ la concentración de A en el tiempo t, resulta

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

Si conocemos además la concentración en el tiempo inicial $t=0$, que denotamos por $[A]_0 = x_0$, tenemos entonces el problema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Este problema es un problema típico de EDO donde se conoce el valor de una función $x(t)$ en el tiempo $t=0$, es decir, se conoce $x(0)=x^0$, y se pretende encontrar la función $x(t)$ que además cumple la ecuación $\frac{dx(t)}{dt} = -k\,x(t) \quad \forall\, t \geq 0$.

Así pues, en una EDO la incógnita es una función que depende de una sóla variable real, $x=x(t)$, y la ecuación diferencial incluye derivadas de primer orden u orden superior de dicha función.

2) Proceso de orden 2 : $2A \longrightarrow$ productos

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[A]}{dt} = k\,[A]^2$$

ó en términos matemáticos ($[A](t) \equiv x(t)$),

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2k\,x^2(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

El dato $x(0)=x^0$ se llama "condición inicial" y representa el estado inicial del sistema (físico o) químico objeto de estudio.

3) Proceso de segundo orden con dos reactantes:

$$A + B \rightarrow \text{productos}$$

$$v = -\frac{d[A]}{dt} = -\frac{d[B]}{dt} = k[A][B]$$

con $[A]_0 = a$, $[B]_0 = b$. Si denotamos,

$$[A](t) = a - x(t)$$

$$[B](t) = b - x(t)$$

entonces tenemos

$$\underbrace{-\frac{d}{dt}(a-x)}_{= \frac{dx}{dt}} = k(a-x)(b-x)$$

Tenemos el problema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

~~Res~~ SOLUCIÓN DE (algunas) EDO ~~de~~ DE ORDEN 1

Ecuaciones de variables separables

Son las que tienen la forma

$$y'(x) = g(x)\,h(y) \qquad (*)$$

Si $h(y) \neq 0$, entonces

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x).$$

Integrando respecto a x:

$$\underbrace{\int \frac{y'(x)}{h(y(x))}\,dx}_{} = \int g(x)\,dx.$$

$$\log h(y(x)) = \int g(x)\,dx$$

y así, $\boxed{h(y(x)) = e^{\int g(x)\,dx}}$ $(**)$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación $(*)$ están definidas implícitamente por la ecuación $(**)$.

Ejemplo 1:

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y = y(x) \text{ incógnita.}$$

$$y(x)\,y'(x) = x$$

$$\underbrace{\int y(x)\,y'(x)\,dx}_{} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$y(x) = t \to y'(x)\,dx = dt \longrightarrow \int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{y^2(x)}{2}.$

Por tanto,

$$\frac{y^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + C\,;$$

$$y^2(x) = x^2 + 2C$$

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{x^2+2C}}$$

<u>Ejemplo 2</u>: Proceso de orden 1: $A \longrightarrow$ productos

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

, $x = x(t)$ concentración de A en el instante t

$$x' = -kx \rightarrow \frac{x'}{x} = -k \rightarrow \int \frac{x'(t)\,dt}{x(t)} = \int -k\,dt$$

$$\rightarrow \log x(t) = -kt + c_1 \rightarrow x(t) = e^{-kt+c_1} = e^{c_1}e^{-kt} = c_2 e^{-kt}.$$

Solución general $\quad x(t) = c_2 e^{-kt}$

$$x(0) = x_0 = c_2 e^0 = c_2$$

Solución $\quad x(t) = x_0 e^{-kt}$

que en una notación más habitual en Química es

$$\boxed{\underbrace{[A](t)}_{\substack{\text{concentración} \\ \text{de reactante en} \\ \text{el tiempo } t}} = \underbrace{[A_0]}_{\substack{\text{concentración} \\ \text{inicial}}} e^{-kt} \;\times \text{exp.} \quad \rightarrow \text{decaimiento exponencial}}$$

Ejemplo 3: Proceso de orden 2: $2A \rightarrow$ productos

$[A](t) \equiv x(t)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2k\, x^2(t) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

$x' = -2k\, x^2;$

$$-\frac{x'}{x^2} = 2k; \quad \underbrace{\int -\frac{x'(t)}{x^2(t)}\, dt}_{} = \int +2k\, dt$$

$$+\frac{1}{x(t)} = +2kt + C_1$$

$$x(t) = \frac{1}{2kt + C_1}$$

$$x_0 = x(0) = \frac{1}{C_1} \rightarrow C_1 = \frac{1}{x_0};$$

$$\boxed{\text{Solución: } x(t) = \frac{1}{2kt + \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{2kt\, x_0 + 1} \qquad [A](t) = \frac{[A]_0}{1 + 2kt[A]_0}}$$

Ejemplo 4: Proceso de 2º orden con dos reactantes $A + B \rightarrow$ productos.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

$[A]_0 = a$, $[B]_0 = b$, $[A](t) = a - x(t)$

$[B](t) = b - x(t)$.

Supongamos que $a \neq b$: separando las variables

$$\frac{x'}{(a-x)(b-x)} = k;$$

$$\frac{x'(t)}{(a-x(t))(b-x(t))} = k;$$

$$\underbrace{\int \frac{x'(t)}{(a-x(t))(b-x(t))}dt}_{\substack{x(t)=s \\ x'(t)dt = ds}} = \int k\,dt = kt + C_1$$

$$\int \frac{ds}{(a-s)(b-s)} = \frac{1}{b-a}\left(\int \frac{ds}{a-s} - \int \frac{ds}{b-s}\right) =$$

$$\frac{1}{(a-s)(b-s)} \underset{a\neq b}{\uparrow}= \frac{A_1}{a-s} + \frac{A_2}{b-s} = \frac{A_1(b-s)+A_2(a-s)}{(a-s)(b-s)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1 b + A_2 a = 1 \\ -A_1 - A_2 = 0 \end{cases} \rightarrow (a-b)A_2 = 1 \rightarrow A_2 = \frac{1}{a-b}$$

$$\rightarrow A_1 = -A_2$$

$$\rightarrow A_1 = \frac{1}{b-a}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{b-a}\left(-\log(a-s) + \log(b-s)\right) = \frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-s}{a-s}\right);$$

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-x(t)}{a-x(t)}\right) = kt + C_1$$

$$x(0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b}{a}\right) = C_1$$

Por tanto:

$$\frac{1}{b-a}\log\left(\frac{b-x(t)}{a-x(t)}\right) = kt + \frac{1}{b-a}\log\frac{b}{a};$$

$$\frac{1}{b-a}\left(\log\frac{b-x(t)}{a-x(t)} - \log\frac{b}{a}\right) = kt;$$

$$\frac{1}{b-a}\log\frac{a(b-x(t))}{b(a-x(t))} = kt;$$

$$\boxed{\frac{1}{[B]_0-[A]_0}\log\frac{[A]_0[B]}{[B_0][A]} = kt}$$

Ecuaciones homogéneas

Se dice que la EDO

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

es homogénea (de grado 1) si $F(x,y)$ cumple

$$F(\lambda x, \lambda y) = F(x,y) \quad \forall\ x \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0.$$

¿Cómo se resuelve una EDO homogénea?

Se hace el cambio de variable dependiente

$$y = vx$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = \frac{dv}{dx}\cdot x + v = F(x, vx) = F(1,v)$$

Así,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

que es una EDO de variables separables

Ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$F(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda x \, \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2+y^2)}{\lambda^2 \, xy} = F(x,y)$$

Cambio:

$$y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \cdot x + v = \frac{x^2+v^2x^2}{x\,v\,x} = \frac{1+v^2}{v};$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{1+v^2}{v} - v\right) = \frac{1}{x}\,\frac{1}{v};$$

$$v\,\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int v(x)\,v'(x)\,dx = \int \frac{1}{x} = \log x + C$$

$$\|$$

$$|\, v(x) = t \,;\; v'(x)\,dx = dt \,|$$

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} = \frac{v^2(x)}{2};$$

$$v^2(x) = \log x + C$$

$$\boxed{\frac{y^2(x)}{2x^2} = \log x + C};$$

Veamos, usando derivación implícita, que efectivamente la ecuación anterior define a y solución de la EDO de partida

$$\cancel{2y(x)y'}\quad \cancel{y^2(x) = 2x^2\log x + C};$$

$$2y\,\cancel{(x)\,y'(x) = 4x\log x + 2x^2\frac{1}{x}}$$

$$\cancel{y(\ y'(x) = \frac{1}{y}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2(x)}{2x^2}\right) = \frac{d}{dx}(\log x + C);$$

$$\cancel{2\frac{d}{dx}\left(y\,\frac{y}{2x^2}\right) = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{y}{x^2} + y}.$$

$$\frac{2yy'}{2x^2} - \frac{y^2}{x^3} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3}\right)\frac{x^2}{y} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2}{xy};$$

Ecuaciones lineales

Son ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = p(x)\,y + q(x)$$

· Si $q \equiv 0$, la ecuación se dice homogénea. Si $q \not\equiv 0$, se dice no homogénea.

Método de resolución:

1º) Resolver la ecuación homogénea

$$\frac{dy_h}{dx} = p(x)\,y_h$$

la cual es de variables separables

Por tanto,

$$\frac{y_h'(x)}{y_h(x)} = p(x)$$

e integrando respecto a x:

$$\int \frac{y_h'(x)}{y_h(x)}\,dx = \int p(x)dx + C_1$$

de donde resulta:

$$\log y_h(x) = \int p(x)dx + C_1$$

es decir, $$y_h(x) = e^{\int p(x)dx + C_1} = C\, e^{\int p(x)dx}.$$

2º) Resolver la ecuación completa (método de variación de constantes)

Proponemos como solución de la ecuación completa una función de la forma

$$y(x) = C(x)\, e^{\int p(x)dx}.$$

Derivando: $$y'(x) = C'(x)\, e^{\int p(x)dx} + C(x)\, e^{\int p(x)dx} \cdot p(x)$$

Sustituyendo en la ecuación completa:

$$C'\, e^{\int p\,dx} + \cancel{C\, e^{\int p\,dx} \cdot p} = \cancel{p\,y} + q$$

y multiplicando por $e^{-\int p}$:

$$C'(x) = q(x)\, e^{-\int p(x)dx}$$

de donde $$C(x) = \int q(x)\, e^{-\int p(x)dx}.$$

Ejemplo 1

$$\frac{dy}{dx} - y = 3e^{2x};$$

$$y' = y + 3e^{2x}.$$

1º) Ecuación homogénea

$$y_h' = y_h; \quad \frac{y'}{y_h} = 1 \to \int \frac{y_h'}{y_h}\,dx = \int 1.\,dx = x + C_1$$

$$\log y_h(x) = x + C_1 \longrightarrow y_h(x) = e^{x+C_1} = c\,e^{x}$$

2º) Ecuación completa: $y(x) = c(x)\,e^{x};$

$$y' = c'e^{x} + ce^{x}$$

$$y' = y + 3e^{2x} \longleftrightarrow c'e^{x} + c\cancel{e^{x}} = c\cancel{e^{x}} + 3e^{2x}$$

$$c'(x) = 3e^{2x}.e^{-x} = 3e^{x};$$

$$c(x) = \int 3e^{x}dx = 3e^{x} + c_2$$

$$\boxed{y(x) = \cancel{c}\cancel{(}(3e^{x} + c_2)e^{x} = 3e^{2x} + c_2e^{x}}$$

Ejemplo 2

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3x^{3};$$

1º) Ecuación homogénea:

$$y_h' = -\frac{2}{x}y_h; \quad \frac{y_h'}{y_h} = -\frac{2}{x};$$

$$\log y_h(x) = -2\log x + c_1 = \log x^{-2} + c_1$$

$$y_h(x) = c\,x^{-2};$$

2º) Ecuación completa: $y(x) = c(x)\,x^{-2}$;

$$y'(x) = c'\,x^{-2} + c\cdot(-2)\,x^{-3};$$

$$y' + 2x^{-1}y = c'\,x^{-2} - 2c\,\cancel{x^{-3}} + 2x^{-1}\cdot\cancel{c}\,x^{-2}$$

$$= 3x^3;$$

$$c' = 3x^{5}; \quad c(x) = 3\,\frac{x^6}{6} = \frac{x^6}{2} + k$$

$$y(x) = \left(\frac{x^6}{2} + c\right)x^{-2} = \boxed{\frac{x^4}{2} + \frac{k}{x^2}}$$